姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第八届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷
(数学类, 2017年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意: 1. 前4大题是必答题, 再从 5–10大题中任选三题, 题号要填如上面的表中.
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1) 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \underline{0}$.

(2) 设a 为实数，关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足 $\underline{a>27 \text{ or } a<-37}$.

(3) 计算曲面积分$I=\iint_s \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ($a>0$为常数), 其中$S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=\underline{-\frac{\pi}{2}a^3}$.

(4) 记两特征值为1，2的2阶实对称矩阵全体为Γ. $\forall A\in\Gamma$, a_{21} 表示A的$(2,1)$位置元素. 则集合$\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$的最小元 $=\underline{\frac{-1}{2}}$.

参考答案. 因为该多项式无3次方项，故4个根之和为0。行列式的每一列加到第一列即可得行列式值为0。

参考答案. 记: $f(x)=3x^4-8x^3-30x^2+72x+a$. $f'(x)=12x^3-24x^2-60x+72=12(x^3-2x^2-5x+6)=12(x-1)(x-3)(x+2)$. f 在 -2 和 3 取得极小值 $-152+a$ 和 $-27+a$, f 在 1 取得极大值 $37+a$.

因此, 当且仅当 $a>27$ 或 $a<-37$ 时方程有虚根.

解: 令曲面 S_1 : $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ z=0 \end{cases}$,取下侧，则$S_1 \cup S$为闭下半球面的内侧.
设其内部区域为Ω，令D为xOy平面上的圆域$x^2+y^2 \leqslant a^2$，则利用高斯公式，得

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{a}\Big\{\iint_{S\cup S_1} - \iint_{S_1} [axdydz + (z+a)^2 dxdy]\Big\} \\ =& \frac{1}{a}\Big[-\iiint_{\Omega}(3a+2z)dv + \iint_{D} a^2 dxdy\Big] \\ =& \frac{1}{a}\Big[-2\pi a^4 - 2\iiint_{\Omega} z dv + \pi a^4\Big] \\ =& -\pi a^3 - \frac{2}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z dz \\ =& -\frac{\pi}{2}a^3. \end{aligned}$$

参考答案. $A = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Q^T$, Q 可表为$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.
故$a_{21} = -\sin t \cos t$, 立即得结果。

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面Γ的方程为$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设P为空间中的平面，它交抛物面Γ于曲线C. 问：C是何种类型的曲线？证明你的结论.

解：交线为抛物线或为椭圆 （5分）

1) 如果平面P平行于$z-$轴，则相交曲线$C=\Gamma\cap P$可以经过以$z-$为旋转轴的旋转，使得P平行于$yz-$平面，C的形状不变. 所以可不妨设P的方程为$x=c$, 交线C的方程为$z=\frac{1}{2}(c^2+y^2)$. 将C投影到$yz-$平面上，得到抛物线$z-\frac{c^2}{2}=\frac{1}{2}y^2$. 由于平面$P$平行于$yz-$轴，故交线为抛物线. （10分）

2) 如果平面P不平行于$z-$轴，我们设P的方程为$z=ax+by+c$. 代入旋转抛物面Γ的方程为$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，得到

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+2c:=R^2.$$

将$C=\Gamma\cap P$垂直投影到$xy-$平面，得到圆周$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. 令Q是以这个圆为底的圆柱，则C也是圆柱Q与平面P的交线. 在圆柱Q中从上或从下放置半径为R的球体，它与平面P相切于F_1和F_2，与圆柱Q相交于圆D_1和D_2. 对$C=Q\cap P$上的任意一点A, 过A点的圆柱母线交圆D_1于B_1, 交圆D_2为B_2. 则线段B_1B_2为定长. 这时，由于球的切线长相等，得到

$$|AF_1|+|AF_2|=|AB_1|+|AB_2|=|B_1B_2|,$$

为常数. 故曲线C为椭圆. （15分）

得分	
评阅人	

三、证明题（15分）设n阶方阵A, B满足: 秩$(ABA) =$ 秩(B). 证明：AB与BA相似.

证明: 设

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q, \quad B = Q^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

其中P, Q是可逆方阵，B_1是r阶方阵，则有 （5分）

$$AB = P\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}, \quad BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_3 & O \end{pmatrix} Q, \quad ABA = P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

由$\operatorname{rank} ABA = \operatorname{rank} B_1 = \operatorname{rank} B$可得，存在矩阵$X, Y$使得$B_2 = B_1X$, $B_3 = YB_1$. 从而有

$$AB = P\begin{pmatrix} I & -X \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} I & O \\ Y & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -Y & I \end{pmatrix} Q.$$

因此，AB与BA相似. （15分）

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、（本题20分）对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的(复值)函数 $\varphi(x)$，称 $\varphi\in\mathscr{S}$，如果 $\forall\, m,k\geqslant 0$ 有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^m\varphi^{(k)}(x)|<+\infty.$$

若 $f\in\mathscr{S}$，可定义 $\hat{f}(x):=\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-2\pi ixy}\,dy\quad(\forall\, x\in\mathbb{R})$. 证明：$\hat{f}\in\mathscr{S}$，且

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,dy,\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}.$$

证明： 由于 $f\in\mathscr{S}$，因此存在 $M_1>0$ 使得

$$|2\pi ixf(x)|\leqslant\frac{M_1}{x^2+1},\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

这样，$\int_{\mathbb{R}}(-2\pi iy)f(y)e^{-2\pi ixy}\,dy$ 关于 $x\in\mathbb{R}$ 一致收敛，从而可得 （2分）

$$\frac{d}{dx}\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}-2\pi iyf(y)e^{-2\pi ixy}\,dy. \tag{2}$$

（4分）

同理可得

$$\frac{d^n}{dx^n}\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}(-2\pi iy)^nf(y)e^{-2\pi ixy}\,dy. \tag{3}$$

而利用分部积分立即得到

$$(f^{(n)})\hat{}\,(x)=(2\pi ix)^n\hat{f}(x),\qquad\forall\, n\geqslant 0. \tag{4}$$

结合 (3)—(4) 并利用 $f\in\mathscr{S}$，可得对任何 $m,k\geqslant 0$，

$$\begin{aligned}&x^m\frac{d^k}{dx^k}\hat{f}(x)\\ =\;&\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{\mathbb{R}}\frac{d^m}{dy^m}\Big((-2\pi iy)^kf(y)\Big)e^{-2\pi ixy}\,dy\end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}$ 上有界. 从而 $\hat{f} \in \mathscr{S}$. 于是, $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,dy$ 收敛, 而

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{A} \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,dy \\
=\ &\int_{-A}^{A} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2\pi i(x-t)y}\,dt \\
=\ &\int_{-A}^{A} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{2\pi ity}\,dt \\
=\ &\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-A}^{A} f(x-t)e^{2\pi ity}\,dy \\
=\ &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\frac{\sin(2\pi At)}{\pi t}\,dt \\
=\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\sin(2\pi At)\,dt + f(x). \qquad (5)
\end{aligned}$$

（15分）

由 $f \in \mathscr{S}$ 易得积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\right| dt$ 收敛, 从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\sin(2\pi At)\,dt = 0. \qquad (6)$$

结合 (5) 和 (6) 即得结论. （20分）

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题10分）设$(F,+,\cdot)$是特征为$p(p\neq 0)$的域，1 和 0 分别为F的单位元和零元. 若φ 为其加群$(F,+)$到其乘法半群$(F,\cdot)$ 的同态，即$\forall x,y\in F$有$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$. 证明：$\varphi$要么将$F$ 的所有元映照为0，要么将F的所有元映照为1.

证明: 假定φ不恒为0, 则$\exists a\in F$ 使得$\varphi(a)\neq 0$. （2分）

于是由$\varphi(0+a)=\varphi(a)$知

$\varphi(a)=\varphi(0)\varphi(a)$导致$\varphi(0)=1$. （5分）

进而$\forall x\in F$ 有

$$1=\varphi(0)=\varphi(\underbrace{x+\cdots+x}_{p})=(\varphi(x))^p,$$

$$(\varphi(x))^p-1=0.$$

注意到$ChF=p$, p为素数, 故有$\forall a,b\in F$

$$(a+b)^p=a^p+b^p;$$

进而

$$(a-b)^p=a^p-b^p.$$

结果由$(\varphi(x))^p-1=0$立得

$$(\varphi(x)-1)^p=0,$$

$\varphi(x)=1$. 证毕. （10分）

得分	
评阅人	

六、（本题10分） 1) 设 E 是三分$Cantor$集, 证明 $\chi_E(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

2) 设 $E \subset [0,1]$, 证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界变差的充要条件是 E 的边界点集是有限集.

1) **答:** $\chi_E(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

作 $[0,1]$ 的分划 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, 其中 $x_0 \in E$, $x_2 \in E, \cdots, x_n \in E$; $x_1 \notin E$, $x_3 \notin E, \cdots, x_{n-1} \notin E$.

构造如下: $\forall\, n \geqslant 1$, 先取 $x_0 = 0$, x_2, $x_4, \cdots, x_{n-2} \in E$, $x_n = 1$, 由 E 的构造知: $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4], \cdots, [x_{n-2}, x_n]$中有无穷多不属于 E的点, 取 $x_1 \in (x_0, x_2) \setminus E$, $x_3 \in (x_2, x_4) \setminus E, \cdots, x_{n-1} \in (x_{n-2}, x_n) \setminus E$. 于是 $\sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| = n$, 当 $n \to \infty$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \to \infty$, 即 $\bigvee\limits_{0}^{1}(\chi_E(x)) = +\infty$. （3分）

2) **证明:** $\Rightarrow$) 反证法. 假设 E 有无穷多边界点$\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$.

$\forall\, n > 1$, 造 $[0,1]$ 的分划 Δ 如下: 取 $x_0 = 0$, 在 $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ 中任取 n 个点按大小排列记为 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$. 由边界点的定义: $\forall\, \varepsilon > 0$, $U(c_i, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ 且 $U(c_i, \varepsilon) \cap \mathscr{C}E \neq \emptyset$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 对 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}\min\{c_{i+1} - c_i;\ i = 1, 2, \cdots, n-1\}$,

若$x_0 \in E$, 取 $x_1 \in (x_0, c_1+\varepsilon) \cap \mathscr{C}E$, $x_2 \in (x_1, c_2+\varepsilon) \cap E$, $x_3 \in (x_2, c_3+\varepsilon) \cap \mathscr{C}E$, $x_4 \in (x_3, c_4+\varepsilon) \cap E, \cdots$.

若$x_{n-2} \in \mathscr{C}E$, 取 $x_{n-1} \in (x_{n-2}, c_{n-1}+\varepsilon) \cap E$, $x_n = 1$.

于是 $\sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \geqslant n - 1$, 当 $n \to \infty$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \to \infty$, 即 $\bigvee\limits_{0}^{1}(\chi_E(x)) = +\infty$, 与 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界变差矛盾, 故假设不真. （7分）

$\Leftarrow$) 设 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 是 E 的边界点, m 有限.

对任意 $[0,1]$ 的分划 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, n 个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 中至多 m 个含有 $\{c_i\}_{i=1}^{m}$ 的点, 也即 $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 中至多 m 个小区间中既有 E 的点同时也有 $\mathscr{C}E$ 的点. 由 $\chi_E(x)$ 的定义有

$$|\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| = \begin{cases} 1, & x_i \in E, x_{i-1} \in \mathscr{C}E \text{ or } x_i \in \mathscr{C}E, x_{i-1} \in E, \\ 0, & x_i, x_{i-1} \in E \text{ or } x_i, x_{i-1} \in \mathscr{C}E. \end{cases}$$

于是 $\sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \leqslant m \Rightarrow \bigvee\limits_{0}^{1}(\chi_E(x)) \leqslant m < \infty$. （10分）

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

七、（本题10分）设S为三维欧氏空间中的一张连通光滑的正则曲面，过S上每一点都存在不同的三条直线落在曲面S上. 证明：S是平面的一部分.

证明：设k_1和k_2为曲面S的两个主曲率, 它对应的单位主方向为e_1和e_2. 设v是$p \in S$点处单位切向量，它与e_1的交角为θ. 则沿v的方向法曲率为

$$k_n(v) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

（3分）

在$p \in S$点记σ为曲面法向量N和v张成的平面, 它截曲面S为曲线C, C称为S沿v方向的法截线. 则法曲率$k_n(v)$等于法截线C在平面σ上 p点处的相对曲率. 因为p点处沿三个不同方向v_1, v_2, v_3的法截线C为直线，故存在不同的θ_1, θ_2和θ_3, $0 \leqslant \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$使得

$$k_n(v_1) = k_1 \cos^2\theta_1 + k_2 \sin^2\theta_1 = 0;$$

$$k_n(v_2) = k_1 \cos^2\theta_2 + k_2 \sin^2\theta_2 = 0;$$

$$k_n(v_3) = k_1 \cos^2\theta_3 + k_2 \sin^2\theta_3 = 0.$$

（6分）

如果$(k_1, k_2) \neq (0, 0)$, 则存在$\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$有

$$\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \varepsilon_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + \varepsilon_1\theta_2) = 0;$$

$$\sin\theta_1 \cos\theta_3 + \varepsilon_2 cos\theta_1 \sin\theta_3 = \sin(\theta_1 + \varepsilon_2\theta_3) = 0;$$

$$\sin\theta_2 \cos\theta_3 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \cos\theta_2 \sin\theta_3 = \sin(\theta_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\theta_3) = 0.$$

由于$0 \leqslant \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$, 故有

$$\theta_1 + \varepsilon_1\theta_2 = 0, \ \theta_1 + \varepsilon_2\theta_3 = 0, \ \theta_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\theta_3 = 0.$$

于是推出θ_1, θ_2和θ_3必有两个相同，矛盾. 故在曲面S的任何点p有$k_1 = k_2 = 0$.

（8分）

由此推出Weingarten变换$W \equiv 0$. 将曲面S参数化为$x(u, v)$, 它的法向量为$N(u, v)$. 则有

$$W(x_u) = -N_u = 0, \ W(x_v) = -N_v = 0.$$

故法向量N为常向量. 再由

$$x_u \cdot N = x_v \cdot N = 0,$$

得到$x \cdot N = c$为常数. 故S落在一张平面上.

（10分）

得分	
评阅人	

八、（本题10分）考虑求解一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的Runge-Kutta法.

(1) 确定下列三级三阶Runge-Kutta法中的所有特定参数：

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3)$$

其中

$$K_1 = f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n+ah, y_n+b_{21}hK_1), \quad K_3 = f(x_n+a_3h, y_n+b_{31}hK_1+b_{32}hK_2).$$

(2) 讨论上述Runge-Kutta格式的稳定性。

解： 1. 对$y' = f(x,y)$两边取积分得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx.$$

由Simpson公式有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n)+\frac{h}{6}[f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]+O(h^5) \tag{7}$$

因此可令$c_1 = 1/6, c_2 = 4/6, c_3 = 1/6$。（2分）

令$y_n = y(x_n)$。将 (??)与(7)两式相减得：

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y_{n+1} = &\frac{2h}{3}[f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1)] \\ &+\frac{h}{6}[f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2)] \end{aligned}$$

我们只需选取参数$a_2, a_3, b_{21}, b_{31}, b_{32}$使得上式右端为$O(h^4)$。

注意到$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$，并记$f_n = f(x_n, y(x_n))$，将$y(x_n + h/2)$做Taylor展开得

$$\begin{aligned} &f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1) \\ &= f(x_n + h/2, y(x_n) + hf_n/2 + h^2y''(x_n)/8 + O(h^3)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1) \end{aligned}$$

为使上式达到要求的精度，应取$a_2 = 1/2, b_{21} = 1/2$。于是利用Taylor展开有

$$f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + h/2, y_n + hK_1/2) = \frac{h^2}{8}y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^3)$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

十、（本题10分）设$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量序列，且$P(X_n=0)=P(X_n=a)=\frac{1}{2}$, 其中常数$a>0$. 记$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}$. 求$Y_n$的特征函数，并证明其分布收敛于区间$[0,\ a]$上的均匀分布.

解： X_k的特征函数为

$$f_{X_k}(t)=Ee^{itX_k}=\frac{1}{2}\left(e^{iat}+1\right)=\exp\left\{\frac{iat}{2}\right\}\cos\frac{at}{2}\quad(k=1,2,\cdots).$$

（2分）

所以$\frac{X_k}{2^k}$的特征函数为$f_{X_k/2^k}(t)=f_{X_k}(t/2^k)=\exp\left\{\frac{iat}{2^{k+1}}\right\}\cos\frac{at}{2^{k+1}}$, 于是应用

$$\cos\frac{at}{2^2}\cos\frac{at}{2^3}\cdots\cos\frac{at}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}\times\frac{\sin\frac{at}{2}}{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}$$

得Y_n的特征函数为

$$\begin{aligned}f_{Y_n}(t)&=\prod_{k=1}^{n}f_{X_k/2^k}(t)\\&=\cos\frac{at}{2^2}\cos\frac{at}{2^3}\cdots\cos\frac{at}{2^{n+1}}\exp\left\{iat\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right]\right\}\\&=\frac{1}{2^n}\times\frac{\sin\frac{at}{2}}{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}\exp\left\{\frac{iat}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}.\end{aligned}$$

（6分）

应用$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}{\frac{at}{2^{n+1}}}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$以及$\exp\left(\frac{iat}{2}\right)-\exp\left(-\frac{iat}{2}\right)=2i\sin\frac{at}{2}$得

$$\lim_{n\to\infty}f_{Y_n}(t)=\frac{2}{at}\exp\left(\frac{iat}{2}\right)\sin\frac{at}{2}=\frac{1}{iat}[\exp(iat)-1].$$

由于区间$[0,\ a]$上均匀分布随机变量的特征函数$\varphi(t)=\frac{1}{iat}[\exp(iat)-1]$, 所以$Y_n$的分布收敛于区间$[0,\ a]$上的均匀分布.

（10分）